Tabla de Test de Hipótesis (Caso: Una muestra)

A. Test para μ con σ^2 conocida: Suponga que $X_1, X_2, \ldots, X_n$, es una m.a.(n) desde $N(\mu, \sigma^2)$

$$\text{Estadística de Prueba } \; Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Hipótesis Nula	Hipótesis Alternativa	Rechace H_0 si
$H_0 : \mu = \mu_0$	$H_1 : \mu \neq \mu_0$	$Z > Z_{(1-\alpha/2)}$ o $Z < -Z_{(1-\alpha/2)}$
$H_0 : \mu \leq \mu_0$	$H_1 : \mu > \mu_0$	$Z > Z_{(1-\alpha)}$
$H_0 : \mu \geq \mu_0$	$H_1 : \mu < \mu_0$	$Z < -Z_{(1-\alpha)}$

Ejemplo : Un profesor ha registrado las calificaciones de sus alumnos durante varios semestres, siendo la media de aquellas igual a 72. Su grupo actual de 36 estudiantes parece tener una aptitud promedio superior, por lo que el profesor desea mostrar que de acuerdo con su media " el grupo actual es mejor que los anteriores ". ¿ Constituye el promedio del grupo $\overline{x} = 75.2$ suficiente evidencia para respaldar la afirmación del profesor ? Utilizar $\alpha = 0.05$ y $\sigma = 12.0$

Solución

Paso 1 : Plantear las hipótesis

$H_0 : \mu = 72$ ($\leq$) (el grupo no es superior)

$H_1 : \mu > 72$ (el grupo es superior) ; Aquí $\mu_0 = 72$.

Paso 2 : Aquí σ es conocida (σ = 12.0), por lo que hay que utilizar: test -A.

Paso 3 : $Z = \sqrt{n}\,(\overline{X} - \mu_0)/\sigma = \sqrt{36}\,(75.2 - 72)/12 = 1.6$

$$Z^{*} = Z_{(1-\alpha)} = Z_{0.95} = 1.645$$

Paso 4 : Como $Z < Z^*$, estoy en la región de aceptación de H_0. La decisión será " no poder rechazar la hipótesis nula "

Conclusión : como conclusión será " no existe evidencia que demuestre que el grupo es superior "

Valor – p : El punto crítico es $z = 1.6$, luego $P(Z>1.6) = P(Z< -1.6) = 0.0548$. Así, para cualquier valor α mayor que 0.0548, la decisión sería " rechazar H_0 "

B. Test para μ con σ^2 desconocida: Suponga que $X_1, X_2, \ldots, X_n$, es una m.a.(n) desde $N(\mu, \sigma^2)$ y sea $S^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{x})^2 / (n-1)$

Estadística de Prueba $T = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$

Hipótesis Nula	Hipótesis Alternativa	Rechace H_0 si .
$H_0 : \mu = \mu_0$	$H_1 : \mu \neq \mu_0$	$T > t_{(n-1,\ 1-\alpha/2)}$ o $T < -t_{(n-1,\ 1-\alpha/2)}$
$H_0 : \mu \leq \mu_0$	$H_1 : \mu > \mu_0$	$T > t_{(n-1,\ 1-\alpha)}$
$H_0 : \mu \geq \mu_0$	$H_1 : \mu < \mu_0$	$T < -t_{(n-1,\ 1-\alpha)}$

Ejemplo: Un presidente de una empresa afirma que el Nº de llamadas solicitando servicio no es más de 15 por semana, en promedio. Para comprobar su afirmación , se revisaron los registros de servicio para n = 36 semanas seleccionadas al azar, el resultado fue que $\overline{X} = 17$ y $S^2 = 9$ para los datos de la muestra . ¿ Contradice la evidencia de la muestra la afirmación del presidente al nivel de significación del 5% ?

Solución

Paso 1 : Plantear las hipótesis

$H_0 : \mu \leq 15$ v/s $H_1 : \mu > 15$ (Aquí ($\mu_0 = 15$)).

Paso 2 : como la varianza poblacional es desconocida (σ^2) hay que usar la test - B.

Paso 3 : $T = \sqrt{n}\,(\overline{X} - \mu_0)/S = 4$ y $T^* = t\,(n\text{-}1, 1\text{-}\alpha)$ y como $n>30$,

entonces $T^* = Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$

Paso 4 : Como $T > T^*$,estoy en la región de rechazo, por lo que hay evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula

Conclusión : El número promedio de llamadas solicitando servicio es mayor que 15.

C. Test para σ^2 con μ desconocida: Suponga que $X_1, X_2, \ldots, X_n$, es una m.a.(n) desde $N(\mu, \sigma^2)$ con μ desconocido y sea $S^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{x})^2 / (n-1)$

$$\text{Estadística de Prueba } Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Hipótesis Nula	Hipótesis Alternativa	Rechace H_0 si
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$	$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$Q > \chi^2_{(n-1,\ 1-\alpha/2)}$ o $Q < \chi^2_{(n-1,\ \alpha/2)}$
$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$Q > \chi^2_{(n-1,\ 1-\alpha)}$
$H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$Q < \chi^2_{(n-1,\ \alpha)}$

Ejemplo : Una determinada Cía. Que produce una parte maquinada para un motor, afirma que tiene una varianza de diametro no mayor que 0.0002 pulgadas. Una muestra aleatoria de 10 de dichas partes dio una varianza de muestra $S^2 = 0.0003$. Si se supone que las medidas del diámetro se distribuyen en forma normal, ¿Hay evidencia para refutar la que afirma el proveedor ? Usar $\alpha = 0.05$

Solución

Paso 1 : Plantear las hipótesis

$$H_0 : \sigma^2 \leq 0.0002 \quad \text{v/s} \quad H_1 : \sigma^2 > 0.0002 \quad (\text{ Aquí } (\sigma_0^2 = 0.0002)).$$

Paso 2 : Cumple los supuestos para ocupar la test - C.

Paso 3 : $Q = (n-1)S^2 / \sigma_0^2 = 9 * 0.0003 / 0.0002 = 13.5$

$Q^* = \chi^2(n\text{-}1, \alpha) = \chi^2(9, 0.05) = 16.9190$

Paso 4 : Como $Q < Q^*$,estoy en la región de aceptación, por lo que no hay evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula.

Conclusión : no hay evidencia suficiente como para contradecir lo que afirma el proveedor

D. Test para una proporción p: Suponga que $X_1, X_2, \ldots, X_n$, es una m.a.(n) desde Bernoulli(p) y sea $\hat{p} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$, donde $X_i \in \{0,1\}$

$$\text{Estadística de Prueba} \quad Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0\,(1 - p_0\,)/n}} \sim N(0,1)$$

Hipótesis Nula	Hipótesis Alternativa	Rechace H_0 si
$H_0 : p = p_0$	$H_1 : p \neq p_0$	$Z > Z_{(1 - \alpha/2)}$ o $Z < - Z_{(1 - \alpha/2)}$
$H_0 : p \leq p_0$	$H_1 : p > p_0$	$Z > Z_{(1 - \alpha)}$
$H_0 : p \geq p_0$	$H_1 : p < p_0$	$Z < - Z_{(1 - \alpha)}$

Ejemplo : Se debe reparar una máquina en una fábrica cuando produce más de 10% de piezas defectuosas en un lote grande de artículos producidos diariamente. Una muestra aleatoria de 100 artículos de la producción del día contiene 15 piezas defectuosas y el supervisor dice que se debe reparar la máquina. ¿La evidencia de la muestra respalda su decisión al nivel $\alpha = 0.01$? Calcule el valor – p para esta prueba.

Solución

Paso 1 : Plantear las hipótesis

$$H_0 : p \leq 0.10 \quad \text{v/s} \quad H_1 : p > 0.10 \quad (\text{ Aquí } (p_0 = 0.10)).$$

Paso 2 : Cumple los supuestos para ocupar la test – D.

Paso 3 : $Z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0\,(1 - p_0\,)\,/\,n}} = \dfrac{0.15 - .010}{\sqrt{(0.1)\,(0.9)\,/\,100}} = 1.67$

$Z^{*} = Z_{(1-\alpha)} = Z_{\,0.99} = 2.325$

Paso 4 : Como Z < Z *, estoy en la región de aceptación de H_0. La decisión será " no poder rechazar la hipótesis nula "

Conclusión : como conclusión será " no existe evidencia que demuestre que la máquina deba repararse "

Valor – p : El punto crítico es z = 1.67, luego P(Z>1.67) = P(Z< -1.67) = 0.0475.

Así, para cualquier valor α mayor que 0.0475, la decisión sería " rechazar H_0 "

Tabla de Test de Hipótesis (Caso: dos muestras)

E. Test para $\mu_1 - \mu_2$ con σ_1^2 y σ_2^2 conocidas: Sea $X_1, X_2, \ldots, X_{n1}$, una m.a.(n) desde $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n2}$, una m.a.(n) desde $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

- X_i son independientes de los Y_j.

Estadística de Prueba $Z = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

Hipótesis Nula	Hipótesis Alternativa	Rechace H_0 si
$H_0 : \mu_1-\mu_2 = 0$	$H_1 : \mu_1-\mu_2 \neq 0$	$Z > Z_{(1-\alpha/2)}$ o $Z < -Z_{(1-\alpha/2)}$
$H_0 : \mu_1-\mu_2 \leq 0$	$H_1 : \mu_1-\mu_2 > 0$	$Z > Z_{(1-\alpha)}$
$H_0 : \mu_1-\mu_2 \geq 0$	$H_1 : \mu_1-\mu_2 < 0$	$Z < -Z_{(1-\alpha)}$

Ejemplo : Se llevo a cabo un estudio para comparar el tiempo que toma a los hombres y mujeres efectuar determinada maniobra en una línea de ensamble. Se utilizaron muestras independientes de 50 hombres y 50 mujeres en un experimento en el cual se tomaba a cada persona el tiempo para hacer tareas idénticas. Los resultados fueron los siguientes:

Datos	n	$\overline{X}$	σ^2
Hombres (1)	50	42 s	18
Mujeres (2)	50	38 s	14

¿Presentaron estos datos la evidencia suficiente como para decir que hay una diferencia entre los verdaderos tiempos de terminación para hombres y mujeres, a un nivel de significancia del 5%

Solución

Paso 1 : Plantear las hipótesis

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad v/s \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

Paso 2 : Cumple los supuestos para ocupar la test –E.

Paso 3 : $Z = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \dfrac{42 - 38}{\sqrt{\dfrac{18}{50} + \dfrac{14}{50}}} = 5$

$$R.C = \{x \,/\, Z^* = Z_{(1 - \alpha/2)} = Z_{0.975} = 1.96 \text{ o } Z^* < -Z_{(1 - \alpha/2)} = -1.96.\}$$

Paso 4 : Como $x \in$ R.C. se tiene que " rechazamos H_0 "

Conclusión : Parece que la diferencia entre los tiempos de hombres y mujeres es real al nivel de significancia del 5%.

NOTA :

En el ejemplo anterior se asumió que σ_1^2 y σ_2^2 eran conocidas, sin embargo se pueden considerar desconocidas y aún así aplicar la Estadística de Prueba producto que $n_1 > 30$ y $n_2 > 30$.

F. Test para $\mu_1 - \mu_2$ con σ_1^2 y σ_2^2 desconocidas:

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_{n1}$, una m.a.(n) desde N(μ_1, σ_1^2) e $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n2}$, una m.a.(n) desde N(μ_2, σ_2^2) donde los X_i son independientes de los Y.

Analizaremos los siguientes casos:

i) σ_1^2 y σ_2^2 desconocidas e iguales

ii) σ_1^2 y σ_2^2 desconocidas , pero distintas

Antes de hacer el test de hipótesis para la diferencia de medias es necesario hacer previamente el test para las razones de varianzas, con lo cual se sabrá si son iguales o distintas (también aquí se asume que las muestras son normales e independientes con medias desconocidas)

F1. Test para σ_1^2 / σ_2^2 : Considérese

$$S_1^2 = \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{x})^2 / (n_1 - 1) \quad y \quad S_2^2 = \sum_{i=1}^{n_2} (X_i - \bar{x})^2 / (n_2 - 1)$$

Estadística de Prueba $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{(p,q)}$, donde $p = n_1 - 1$ y $q = n_2 - 1$

Hipótesis Nula	Hipótesis Alternativa	Rechace H_0 si
$H_0 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1$	$H_1 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq 1$	$F > F_{(p,q,1-\alpha/2)}$ o $F < F_{(p,q,\alpha/2)}$
$H_0 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 \leq 1$	$H_0 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 > 1$	$F > F_{(p,q,1-\alpha)}$
$H_0 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 \geq 1$	$H_0 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 < 1$	$F < F_{(p,q,\alpha)}$

Recordar : $F_{(p,q,\alpha)} = 1 / F_{(q,p,1-\alpha)}$

F2. Test para $\mu_1 - \mu_2$ con σ_1^2 y σ_2^2 desconocidas e iguales ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$)

Considérese, $S_p^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n1 + n2 - 2}$, donde

$$S_1^2 = \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{x})^2 / (n_1 - 1) \quad \text{y} \quad S_2^2 = \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{y})^2 / (n_2 - 1)$$

Estadística de Prueba $T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_p \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t(\nu)$, donde $\nu = n_1 + n_2 - 2$

Hipótesis Nula	Hipótesis Alternativa	Rechace H_0 si
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$	$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$	$T > t_{(\nu, 1-\alpha/2)}$ o $T < -t_{(\nu, 1-\alpha/2)}$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0$	$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$	$T > t_{(\nu, 1-\alpha)}$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq 0$	$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$	$T < -t_{(\nu, 1-\alpha)}$

Ejemplo : El diseñador de una troqueladora nueva de lámina afirma que su máquina puede trabajar con determinado producto con más rapidez que la máquina que está en uso. Se hicieron nueve ensayos independientes troquelando el mismo artículo en cada máquina y se obtuvieron los siguientes resultados de tiempos de terminación:

Máquina Normal	Máquina nueva
$n_1 = 9$	$n_2 = 9$
$\overline{X_1} = 35.22$ seg.	$\overline{X2} = 31.56$ seg.
$(n_1 - 1)\, S_1^2 = 195.50$	$(n_2 - 1)\, S_2^2 = 160.22$ (Aquí : $S_1^2 = 21.72$, $S_2^2 = 17.8$)

El nivel de significación del 5%, ¿ puede respaldar la afirmación del diseñador ?

Asuma que las varianzas poblacionales son desconocidas, pero iguales.

Solución

1º Parte: Comparar las varianzas

Paso 1 : Plantear las hipótesis

$$H_0 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1 \text{ v/s } H_1 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq 1$$

Paso 2 : Cumple los supuestos para ocupar el test –F1.

Paso 3 : $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} = \dfrac{21.72}{17.8} = 1.22$

$$R.C = \{x \,/\, F > F_1^* = F_{(9, 9, 0.975)} = 4.02 \vee$$

$$F < F_2^* = F_{(9, 9, 0.025)} = 1 \,/\, F_{(9, 9, 0.975)} = 1 \,/\, 4.02 = 0.24\}$$

Paso 4 : Como x $\notin$ R.C. se tiene que se " acepta H_0 "

Conclusión : Las varianzas son desconocidas, pero iguales al nivel de significancia del 5%.

2º Parte: Comparar las medias

Paso 1 : Plantear las hipótesis

$$H_0 : \mu_1-\mu_2 \leq 0 \quad \text{v/s} \quad H_1 : \mu_1-\mu_2 > 0 \quad (\text{ o sea, } \mu_2 < \mu_1)$$

Paso 2 : Cumple los supuestos para ocupar la test –F2.

Paso 3 : $T = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_p \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} = \dfrac{35.22 - 31.56}{4.71 \sqrt{\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9}}} = 1.65$, ya que

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{n1 + n2 - 2} = \frac{195.5 + 160.22}{16} = 22.24$$

$$t^* = t_{(\nu\,,\,1-\alpha)} = t_{(16\,,\,0.95)} = 1.7459$$

$$R.C = \{x \,/\, T > t^* = t_{(\nu\,,\,1-\alpha)} = t_{(16\,,\,0.95)} = 1.7459 \}$$

Paso 4 : Como $x \notin$ R.C. se tiene que se " acepta H_0 " (o bien " no se puede rechazar H_0 ")

Conclusión : No hay evidencia suficiente al nivel de significancia del 5% como para respaldar la afirmación del diseñador.

&&&&&&&&&&

F3. Test para $\mu_1 - \mu_2$ con σ_1^2 y σ_2^2 desconocidas y distintas

Considérese, $S_1^2 = \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{x})^2 / (n_1 - 1)$ y $S_2^2 = \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{y})^2 / (n_2 - 1)$

Estadística de Prueba $T = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} \sim t(\eta)$ (aprox.),

donde $\eta = \dfrac{(S_1^2 / n_1 + S_2^2 / n_2)^2}{\dfrac{(S_1^2 / n_1)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{(S_2^2 / n_2)^2}{n_2 - 1}}$

Hipótesis Nula	Hipótesis Alternativa	Rechace H_0 si
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$	$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$	$T > t_{(\eta\ ,\ 1 - \alpha/2)}$ o $T < -\ t_{(\eta\ ,\ 1 - \alpha/2)}$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0$	$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$	$T > t_{(\eta\ ,\ 1 - \alpha)}$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq 0$	$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$	$T < -\ t_{(\eta\ ,\ 1 - \alpha)}$

Nota : A diferencia de las otras estadísticas de prueba, en este caso se tiene una distribución aproximada del tipo t- student y no exacta (Problema de Behrens – Fisher).

Ejemplo : Muchos estudiantes se han quejado de que la máquina vendedora de refrescos A despacha menos bebidas que la máquina B. Los siguientes son los datos de las muestras

Maquina A: $n_1 = 10$ $\bar{x}_1 = 5.38$ $S_1^2 = 1.59$

Máquina B: $n_2 = 12$ $\bar{x}_2 = 5.92$ $S_2^2 = 0.83$

Con $\alpha = 0.05$, ¿ Respalda la evidencia la hipótesis de que la cantidad media despachada por la máquina A es menor que la despachada por la máquina B ?

Solución

1º Parte: Comparar las varianzas

Paso 1 : Plantear las hipótesis

$$H_0 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1 \text{ v/s } H_1 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq 1$$

Paso 2 : Cumple los supuestos para ocupar el test –F1.

Paso 3 : $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{1.59^2}{0.83^2} = 3.67$

R.C $= \{x \,/\, F > F_1^* = F_{(10, 12, 0.975)} = 3.37 \ \vee$

$F < F_2^* = F_{(10, 12, 0.025)} = 1 \,/\, F_{(12, 10, 0.975)} = 0.27 \}$

Paso 4 : Como x $\in$ R.C. se tiene que se " rechaza H_0 "

Conclusión : Las varianzas son desconocidas y distintas al nivel de significación del 5%.

2º Parte: Comparar las medias

Paso 1 : Plantear las hipótesis

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq 0$ v/s $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$ (o sea, $\mu_1 < \mu_2$)

Paso 2 : Cumple los supuestos para ocupar la test –F3.

Paso 3 : $T = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} = \dfrac{5.38 - 5.92}{\sqrt{\dfrac{1.59^2}{10} + \dfrac{0.83^2}{12}}} = -0.969$, ya que

$$\eta = \frac{(S_1^2 / n_1 + S_2^2 / n_2)^2}{\dfrac{(S_1^2 / n_1)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{(S_2^2 / n_2)^2}{n_2 - 1}} = 13.0029 \approx 13$$

$$t^* = -t_{(\nu, 1-\alpha)} = -t_{(13, 0.95)} = -1.7709$$

$$R.C = \{x / T < t^* = -1.7709\}$$

Paso 4 : Como $x \notin$ R.C. se tiene que se " acepta H_0 " (o bien " no se puede rechazar H_0 ")

Conclusión : No hay evidencia suficiente indicada por estas muestras para concluir que la máquina A despacha menos bebida que la máquina B.

G. Test para diferencia de proporciones ($p_1 - p_2$) : Suponga que $X_1, X_2, \ldots, X_{n1}$ e $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n2}$, muestras aleatorias independientes de poblaciones Bernoulli de parámetros p_1 y p_2 respectivamente y sean

$$\hat{p}_1 = \sum_{i=1}^{n_1} X_i / n_1 \text{, donde } X_i \in \{0,1\} \; ; \; \hat{p}_2 = \sum_{i=1}^{n_2} Y_i / n_2 \text{, donde } Y_i \in \{0,1\}$$

Estadística de Prueba $Z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$

Hipótesis Nula	Hipótesis Alternativa	Rechace H_0 si
$H_0 : p_1 - p_2 = 0$	$H_1 : p_1 - p_2 \neq 0$	$Z > Z_{(1-\alpha/2)}$ o $Z < -Z_{(1-\alpha/2)}$
$H_0 : p_1 - p_2 \leq 0$	$H_1 : p_1 - p_2 > 0$	$Z > Z_{(1-\alpha)}$
$H_0 : p_1 - p_2 \geq 0$	$H_1 : p_1 - p_2 < 0$	$Z < -Z_{(1-\alpha)}$

Ejemplo : Un vendedor de una nueva marca de radio comunicadores afirma que el número de aparatos defectuosos en sus lotes de producción será no mayor que el de un competidor. Se toman m.a. de ambos productos para contrastar esta aseveración.

Producto	Nº defectuosos	Nº revisados
Del vendedor (1)	8	100
Del competidor (2)	2	100

¿ Puede rechazarse la afirmación del vendedor al nivel de significación 0.05 ?

Solución

1º Parte: Comparar las varianzas

Paso 1 : Plantear las hipótesis

$$H_0 : p_1 - p_2 \leq 0 \text{ v/s } H_1 : p_1 - p_2 > 0 \quad (\text{ Aquí } p_1 > p_2 \ )$$

Paso 2 : Cumple los supuestos para ocupar la test –G.

Paso 3 : $Z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}} = \dfrac{0.08 - 0.02}{\sqrt{\dfrac{0.08 * 0.92}{100} + \dfrac{0.02 * 0.98}{100}}} = 1.9653 \approx 1.97$

$R.C = \{x \,/\, Z > Z^* = Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645\}$

Paso 4 : Como $x \in$ R.C. se tiene que se “ rechaza H_0 “

Conclusión : Existe evidencia suficiente al nivel de significación del 5% para rechazar la afirmación del vendedor, esto es hay evidencia para afirmar que el número de aparatos defectuosos si es mayor.

Valor – p : El punto crítico es $z \approx 1.97$, luego $P(Z<1.97) = 0.9756$. Así, para cualquier valor α menor que 0.0244, la decisión sería “ aceptar H_0 “

Prueba : Bondad de Ajuste

Los procedimientos de pruebas de hipótesis que se han presentado en las secciones anteriores están diseñados para problemas en los que se conoce la distribución de probabilidad, y las hipótesis involucra los parámetros de la distribución. En esta sección se describe un procedimiento formal basado en la distribución χ^2 que permitirá verificar la hipótesis de que una distribución en particular será un modelo satisfactorio de la población. Por ejemplo tal vez se quiera probar la hipótesis de que la población es normal.

Cabe mencionar que este es sólo uno de los muchos procedimientos utilizados para tal fin. Cuando se trabaja con funciones continuas, la prueba χ^2 tal vez no sea el mejor procedimiento, pero es bastante popular este método.

$$\text{Estadística de Prueba : } L = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2 \text{ , donde}$$

- k es el Nº de intervalos en donde están las frecuencias
- O_i es la frecuencia observada del i - ésimo intervalo
- E_i es la frecuencia esperada del i - ésimo intervalo

  Nota: Si el valor E i de la última celda es menor que 3, se suman las dos ultimas frecuencias esperadas, o bien hasta ser superior a tres.
- H_0 : La distribución es la propuesta v/s H_1: no es esta la distribución

  R.C = $=\{x \,/\, L > \chi^2_{(1-\alpha,\ k-p-1)}\}$, donde p es el Nº de parámetros de la distribución propuesta.

Ejemplo : Se propone que el número de defectos en las tarjetas de circuito impreso sigue una distribución Poisson. Se reúne una m.a.(60) tarjetas de circuito impreso y se observa el número de defectos. Los resultados obtenidos son los siguientes. Use $\alpha = 0.05$

Nº Defectos	0	1	2	3
Frec. Observada	32	15	9	4

Solución

1º La media es un estimador de λ cuando estamos en el caso Poisson, luego $\hat{\lambda} = 0.75$
(32*0 + 15*1 + 9*2 + 4*3) / 60 = 0.75. Sea X : Nº defectos en las tarjetas

2º H0 : X~ P(0.75) v/s X no proviene de P(0.75)
Calculemos entonces las respectivas probabilidades

$$P(X = k) = \frac{0.75^k \, e^{-0.75}}{k\,!}$$

3º

X =k	0	1	2	3 .
P(X = k)	0.472	0.354	0.133	0.041
E_i	28.32	21.24	7.98	2.46

(**Nota** : $E_1 = 0.472 * 60 = 28.32$, …)

Advertencia : La última celda tiene frecuencia esperada < 3.

4º

X =k	0	1	2 (o más)
E_i	28.32	21.24	10.44

5º

$$L = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(32 - 28.32)^2}{28.32} + \frac{(15 - 21.24)^2}{21.24} + \frac{(13 - 10.44)^2}{10.44} = 2.94$$

$$R.C = \{x \,/\, L > \chi^2_{(1-\alpha,\, k-p-1)} = \chi^2_{(0.95,\, 3-1-1)} = \chi^2_{(0.95,\, 1)} = 3.841\}$$

6º Conclusión : $x \notin$ R.C. luego “ se acepta H_0 “, esto es se puede asumir con un nivel de significación del 5% que la distribución es P (0.75).