Universidad De Atacama
Facultad De Ingeniería / Departamento De Matemática

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDADES

EJERCICIOS 5: ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

Profesor: Hugo S. Salinas **Segundo Semestre 2010**

---

1. La variabilidad en la producción es un indicador de mala calidad, por cuanto algunas unidades producidas quedan fuera de los límites permitidos y son rechazados por los clientes. Supongamos que tú trabajas en una embotelladora de bebidas y necesitas embotellar bebidas de 2000 c.c. Se sabe que la distribución de frecuencias del volumen efectivamente embotellado es normal con media 2000 c.c. y desviación estándar 2.5 c.c.

   a) Si los limites entre los cuales las bebidas son aceptadas son 1995 y 2005 c.c., calcular la proporción de bebidas rechazadas.

   b) ¿Cuáles son los limites de aceptación que rechazan el 2.5 % de las bebidas con mayor volumen y el 2.5 % de las bebidas con menor volumen?

2. Un examen consta de n preguntas con k alternativas cada una. Supongamos que cierto alumno responde cada pregunta de acuerdo al siguiente procedimiento: si conoce la alternativa correcta, entonces la escoge con probabilidad 1; si no la sabe, entonces escoge una alternativa al azar. Supongamos que la probabilidad de que el alumno conozca la alternativa correcta es α $(0 < \alpha < 1)$, igual para todas las preguntas y que las distintas preguntas se responden en forma independiente.

   a) Sea X el número de preguntas respondidas correctamente. Encontrar la función de probabilidad de X.

   b) ¿Si una de estas preguntas fue respondida correctamente, ¿cuál es la probabilidad de que el alumno haya sabido la alternativa correcta?

   Solución: (a) $X \sim Bi(n, p = \alpha + (1-\alpha)/k)$ (b) $k\alpha/((k-1)\alpha + 1)$

3. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria (m.a.) de una distribución continua, con

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{y} \quad Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2},$$

   a) Plantear las ecuaciones del método de momentos para los parámetros α y β.

   b) Calcular los estimadores de momentos de α y β.

4. Supongamos que X es el esfuerzo vibratorio (lb/pulg^2) en la paleta de una turbina de viento, a una velocidad particular en un túnel de viento. El artículo *Blade Fatigue Life Assessment with Application to VAWTS* (Journal of Solar Energy Engineering, 1982, pp. 107-111) propone la distribución Rayleigh, cuya función de densidad es

$$f(x) = \frac{x}{\theta}\, e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, \qquad x \geq 0,\ \theta > 0,$$

   como modelo para la distribución de la variable aleatoria X.

a) Encontrar la función de distribución acumulada $F(x) = P(X \leq x)$.

b) Encontrar la función de log-verosimilitud (es decir $\log L(\theta)$).

c) Encontrar el EMV del parámetro θ.

d) Estimar θ de las siguientes $n = 10$ observaciones sobre esfuerzo vibratorio de una paleta de turbina bajo condiciones específicas:

```
16.88 10.23 4.59 6.66 13.68
14.23 19.87 9.40 6.51 10.95
```

e) Utilizar el estimador $\widehat{\theta}$ en *d*) para estimar la probabilidad de que X se encuentre entre 10 y 20.

5. Sea $Y_1, \ldots, Y_n$ una m.a.s. de tamaño n de una v.a. Rayleight cuya función de densidad está dada por:

$$g(y; \lambda) = \frac{y}{\lambda} e^{-\frac{y^2}{2\lambda}}, \qquad y > 0,\ \lambda > 0,$$

a) Encontrar la función log-verosimilitud $l(\lambda)$.

b) Calcular el EMV del parámetro λ.

c) Se sabe que $E(Y^2) = 2\lambda$. Utilizar este hecho para probar que el EMV de λ encontrado en *b*) es insesgado.

d) Estimar λ de las siguientes observaciones sobre esfuerzo vibratorio de una paleta de turbina bajo condiciones específicas:

16.88	10.23	4.59	6.66	13.68
14.23	19.87	9.40	6.51	10.95