Universidad De Atacama

Facultad De Ingeniería / Departamento De Matemática

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDADES

PAUTA DE CORRECCIÓN: PRUEBA PARCIAL Nº2

Profesor: Hugo S. Salinas. Primer Semestre 2011

---

1. El gerente de una compañía de automóviles compra neumáticos en lotes de 500. Por experiencias anteriores, sabe que uno de cada mil neumáticos, adquiridos en un determinado almacén, sale defectuoso y debe reemplazarse en la primera semana de uso. Calcular la probabilidad de que en un lote de neumáticos:

   a) contenga sólo uno defectuoso.
   Solución:
   Sea X : número de neumáticos defectuosos en un lote de 500. Se sabe que la probabilidad de éxito es $p = 0.001$. Aquí la variable aleatoria X se distribuye binomial y la podemos aproximar a una Poisson con $\lambda = E(X) = np = 500 \times 0.001 = 0.5$. Por lo tanto $X \sim \mathcal{P}(\lambda = 0.5)$ y se pide

$$P(X = 1) = \frac{0.5^1 e^{-0.5}}{1!} = 0.3033$$

(8 ptos.)

   b) no tenga más de tres defectuosos.
   Solución:

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= \frac{0.5^0 e^{-0.5}}{0!} + \frac{0.5^1 e^{-0.5}}{1!} + \frac{0.5^2 e^{-0.5}}{2!} + \frac{0.5^3 e^{-0.5}}{3!} = 0.9982 \end{aligned}$$

(8 ptos.)

   c) ningún neumático sea defectuoso.
   Solución:

$$P(X = 0) = \frac{0.5^0 e^{-0.5}}{0!} = 0.6065$$

(8 ptos.)

2. En cierto servicio telefónico, la probabilidad de que una llamada sea contestada en menos de 30 segundos es 0.75. Supongamos que las llamadas son independientes.

a) Si una persona llama 10 veces, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente nueve de las llamadas sean contestadas en un espacio de 30 segundos?

Solución:

Sea X : número de llamadas contestadas (en menos de 30 segundos) de un total de 10 intentos. Entonces $X \sim \mathcal{B}(n = 10, p = 0.75)$. Por lo tanto

$$P(X = 9) = \binom{10}{9}(0.75)^9(0.25)^1 = 0.1877$$

(5 ptos.)

b) Si una persona llama 20 veces, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 16 de las llamadas sean contestadas en menos de 30 segundos?

Solución:

En este caso sea $X \sim \mathcal{B}(n = 20, p = 0.75)$

$$P(X \geq 16) = \sum_{x=16}^{20} \binom{20}{x}(0.75)^x(0.25)^{20-x} = 0.4148$$

(5 ptos.)

c) Si una persona llama 20 veces, ¿cuál es el número promedio de llamadas que serían contestadas en menos de 30 segundos?

Solución:

Del item b) $E(X) = np = 20 \times 0.75 = 15$. Por lo tanto se espera que se contesten 15 llamadas en promedio.

(5 ptos.)

d) ¿Cuál es la probabilidad de tener que llamar cuatro veces para obtener la primera respuesta en menos de 30 segundos?

Solución:

Sea Y : número de llamadas sin responder hasta la primera respuesta (en menos de 30 segundos). Entonces $Y \sim \mathcal{G}(p = 0.75)$. Tener que llamar cuatro veces para obtener la primera respuesta es equivalente a decir que no contestaron en tres ocasiones. Por lo tanto

$$P(Y = 3) = (0.25)^3(0.75) = 0.01172$$

(5 ptos.)

e) ¿Cuál es el número promedio de llamadas necesario para obtener dos respuestas en menos de 30 segundos?

Solución:

Sea U : número de llamadas sin responder hasta obtener dos respuestas (en menos de 30 segundos). Entonces $U \sim \mathcal{BN}(r = 2, p = 0.75)$. De aquí, $E(U) = \frac{2\times 0.25}{0.75} = 1.33$ es el número promedio de fracasos (llamadas sin responder) hasta lograr dos respuestas. Por lo tanto, esto es equivalente a decir que se necesitan entre 3 y 4 llamadas hasta obtener dos respuestas.

(5 ptos.)

3. La nueva ley 20001, artículo primero, establece la prohibición de que un trabajador cargue pesos superiores a 50 kilogramos, esto con el fin de cuidar la integridad física de los cargadores. Supongamos que un cargador de una Feria, carga sacos de frutas que tienen en promedio un peso igual a los 49.5 kilos y una desviación estándar igual a los 1.8 kilos y además carga sacos de verduras que tienen en promedio un peso igual a los 49.8 kilos y una desviación estándar igual a los 1.5 kilos. Con estos antecedentes:

   Primero: Sean X : peso de un saco de frutas, con media 49.5 y desviación estándar 1.8 (en kilos) e Y : peso de un saco de verduras, con media 49.8 y desviación estándar 1.5 (en kilos).

   a) Si el cargador en un día de trabajo carga 100 sacos de frutas ¿Cuál es la probabilidad que en promedio haya cargado un peso no reglamentario?

   Solución:

   Sea $\overline{X}$ el promedio de los 100 sacos de frutas. Entonces, por Teorema Central del Límite, se tiene que $\overline{X} \sim N(49.5, 1.8/\sqrt{100})$. Se pide:

   $$P(\overline{X} > 50) = 1 - P(\overline{X} \leq 50) = 1 - P\left(Z \leq \frac{50 - 49.5}{0.18}\right) = 1 - P(Z \leq 2.78) = 1 - 0.9973$$

   Por lo tanto $P(\overline{X} > 50) = 0.0027$.

   (8 ptos.)

   b) Si una camioneta de fletes soporta un peso máximo de 15000 kilogramos y un trabajador carga 300 sacos de verdura en ella ¿Cuál es la probabilidad que la camioneta no soporte el peso de los sacos de verdura cargados por el trabajador?

   Solución:

   Sea $\overline{Y}$ el promedio de los 300 sacos de verduras. Entonces, por Teorema Central del Límite, se tiene que $\overline{Y} \sim N(49.8, 1.5/\sqrt{300}) \Leftrightarrow \sum Y \sim N(300 \times 49.8, \sqrt{300} \times 1.5)$. Se pide:

   $$P(\sum Y > 15000) = 1 - P(\sum Y \leq 15000) = 1 - P\left(Z \leq \frac{15000 - 14940}{25.980}\right) = 1 - P(Z \leq 2.31)$$

   Por lo tanto $P(\sum Y > 15000) = 1 - 0.9896 = 0.0104$.

   (8 ptos.)

   c) Si el cargador en un día de trabajo carga 196 sacos de frutas y 100 sacos de verdura ¿Cuál es la probabilidad que en promedio durante el día, haya cargado un peso no reglamentario?

   Solución:

   Sea T : el peso promedio de 196 sacos de frutas y 100 sacos de verdura. Es decir,

   $$T = \frac{196\overline{X} + 100\overline{Y}}{296} = \frac{\sum X + \sum Y}{296}$$

   Esta variable se distribuye normal con media $E(T)$ y varianza $V(T)$ tal que:

   $$\begin{aligned} E(T) &= \frac{\sum E(X) + \sum E(Y)}{296} = \frac{\sum 49.5 + \sum 49.8}{296} = \frac{9720 + 4980}{296} = 49.60 \\ V(T) &= \frac{\sum V(X) + \sum V(Y)}{296^2} = \frac{\sum 3.24 + \sum 2.25}{296^2} = \frac{635.04 + 225}{296^2} = 0.0098 \end{aligned}$$

Es decir, $T \sim \mathcal{N}(49.60, 0.099)$. Por lo tanto:

$$P(T > 50) = 1 - P(T \leq 50) = 1 - P\left(Z \leq \frac{50 - 49.60}{0.099}\right) = 1 - P(Z \leq 4.04) = 0$$

(8 ptos.)

4. Supongamos que hay dos máquinas disponibles para cortar corchos para botellas de vino. La primera máquina produce corchos cuyo diámetro tiene una distribución normal de media 3 cms. y desviación estándar 1 cm. La segunda máquina produce corchos cuyo diámetro tiene una distribución normal de media 3.04 cms. y desviación estándar 0.02 cms. Los corchos catalogados como aceptables tienen un diámetro que va desde los 2.9 hasta los 3.1 cms. Supongamos que los porcentajes de producción de las máquinas 1 y 2 son 40 % y 60 %, respectivamente.

   Primero: Sean X e Y las variables aleatorias que registran los diámetros de los corchos (en cms.) producidos por las máquinas 1 y 2, respectivamente. Se sabe que $X \sim \mathcal{N}(3, 1)$ e $Y \sim \mathcal{N}(3.04, 0.02)$.

   a) ¿Qué máquina produce corchos aceptables con mayor probabilidad?
   Solución:
   Según la distribución de probabilidad para los diámetros de los corchos producidos por la máquina 1, tenemos que esta máquina producirá un corcho aceptable con probabilidad

$$P(2.9 \leq X \leq 3.1) = P\left(\frac{2.9 - 3}{1} \leq Z \leq \frac{3.1 - 3}{1}\right) = P(Z \leq 0.1) - P(Z \leq -0.1)$$

   Por lo tanto, $P(2.9 \leq X \leq 3.1) = 0.5398 - 0.4602 = 0.0796$.

   Ahora, para la máquina 2.

$$P(2.9 \leq Y \leq 3.1) = P\left(\frac{2.9 - 3.04}{0.02} \leq Z \leq \frac{3.1 - 3.04}{0.02}\right) = P(Z \leq 3) - P(Z \leq -7)$$

   Por lo tanto, $P(2.9 \leq Y \leq 3.1) = 0.9987 - 0.0000 = 0.9987$.
   Finalmente, podemos decir que la máquina 2 produce corchos aceptables con mayor probabilidad.

(6 ptos.)

   b) Supongamos que se toma un corcho al azar y el diámetro mide más de 3.1 cms. ¿Cuál es la probabilidad que provenga de la máquina 1?
   Solución:
   Sea U la variable aleatoria que registra el diámetro de un corcho elegido al azar. Para cada $i = 1, 2$, sea M_i el evento: el corcho es producido por la máquina i. Con esto,

podemos calcular la probabilidad solicitada:

$$\begin{aligned}
P(M_1|U>3.1) &= \frac{P(M_1)P(U>3.1|M_1)}{P(M_1)P(U>3.1|M_1)+P(M_2)P(U>3.1|M_2)}\\
&= \frac{0.4P\left(Z_1>\frac{3.1-3}{1}\right)}{0.4P\left(Z_1>\frac{3.1-3}{1}\right)+0.6P\left(Z_2>\frac{3.1-3.04}{0.02}\right)}\\
&= \frac{0.4(1-P(Z_1\le 0.1))}{0.4(1-P(Z_1\le 0.1))+0.6(1-P(Z_2\le 3))}\\
&= \frac{0.4(1-0.5398)}{0.4(1-0.5398)+0.6(1-0.9987)} = \frac{0.18408}{0.18408+0.00078} = 0.9958
\end{aligned}$$

(6 ptos.)

c) Se van midiendo corchos sucesiva e independientemente entre si hasta encontrar cuatro corchos aceptables. Determinar la probabilidad de examinar 10 corchos para cumplir con lo solicitado.

<u>**Solución**</u>:

Sea W la variable aleatoria que registra el número de corchos NO aceptables que se deben examinar hasta obtener cuatro corchos aceptables. Es decir, $W \sim \mathcal{BN}(r=4,p)$ donde p es la probabilidad de obtener un corcho aceptable. Ahora, es claro que la probabilidad de tener un corcho aceptable, dependerá de la máquina que lo haya producido. Luego

$$\begin{aligned}
p &= P(2.9\le U\le 3.1)\\
&= P(M_1)P(2.9\le U\le 3.1|M_1)+P(M_2)P(2.9\le U\le 3.1|M_2)\\
&= 0.4P\left(\frac{2.9-3}{1}\le Z_1\le \frac{3.1-3}{1}\right)+0.6P\left(\frac{2.9-3.04}{0.02}\le Z_2\le\frac{3.1-3.04}{0.02}\right)\\
&= 0.4(P(Z_1\le 0.1)-P(Z_1\le -0.1))+0.6(P(Z_2\le 3)-P(Z_2\le -7))\\
&= 0.4(0.5398-0.4602)+0.6(0.9987-0.0000)\\
&= 0.03184+0.59922 = 0.63106
\end{aligned}$$

Por lo tanto la probabilidad que se pide es

$$P(W=6) = \binom{6+4-1}{6}(0.63106)^4(0.36894)^6 = 0.0359$$

(6 ptos.)

d) Supongamos que se examinan 50 corchos sucesiva e independientemente entre si y se cuenta el número de corchos aceptables. Determinar la probabilidad que hayan al menos 45 corchos aceptables.

<u>**Solución**</u>:

Del item c) $p=0.63106$ es la probabilidad de encontrar un corcho aceptable. Sea V : número de corchos aceptables en un lote de 50. De aquí, $V\sim\mathcal{B}(n=50,p=0.63106)$. Por lo tanto

$$P(V\ge 45) = \sum_{v=45}^{50}\binom{50}{v}(0.63106)^v(0.43262)^{50-v}$$

(6 ptos.)